KOMETY I GALAKTYKA

S. Breiter, M. Fouchard, R. Ratajczak

Pływy dysku galaktycznego

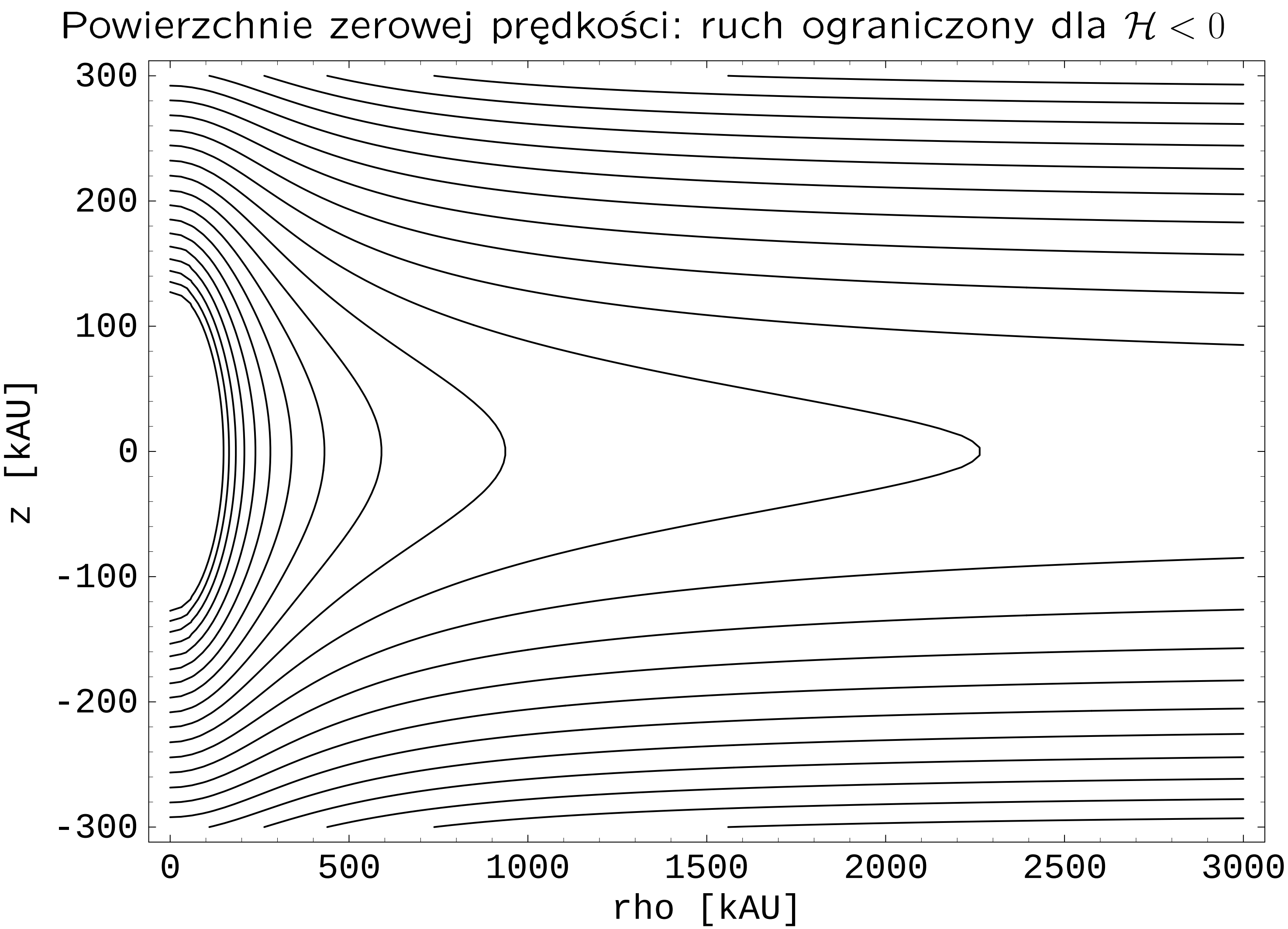
Hamiltonian

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \\ \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \mathcal{H}_1 &= \tfrac{1}{2} G_3\, z^2. \end{aligned}$$

- Zagadnienie keplerowskie w płaszczyźnie dysku.

- Symetria obrotowa: $xY - yX = na^2\sqrt{1-e^2}\,\cos I = \mathrm{const}$.

- Zagadnienie niecałkowalne (Maciejewski i Prętka).


Powierzchnie zerowej prędkości: ruch ograniczony dla $\mathcal{H} < 0$
300
200
100
0
-100
-200
-300
z [kAU]
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
rho [kAU]

Przybliżone rozwiązanie analityczne

- Układ uśredniony jest całkowalny.

- Częściowe rozwiązanie analityczne, bez Ω i z niejednoznacznością ω (Matese and Whitman).

- Kluczowe znaczenie wektora Laplace'a w układzie związanym z linią węzłów (libracja wokół $\omega = 90^{\circ}, 270^{\circ}$, cyrkulacja).

NOWINKI (Breiter i Ratajczak, 2005)

- Rozwiązanie dla węzła wstępującego

$$\Omega(\tau) = \Omega_0 - C\,\mathbf{\Pi}(n;\,\varphi(\tau)\,|\,m),$$

czyli

$$\Omega = \Omega_0 - C_0\,\tau - \Psi(\tau).$$

- Zastosowanie „elementów wektorowych''

$$\vec{e} \equiv \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} \cos\omega\cos\Omega - c\sin\omega\sin\Omega \\ \cos\omega\sin\Omega + c\sin\omega\cos\Omega \\ s\,\sin\omega \end{pmatrix},$$

$$\vec{h} \equiv \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \sqrt{1-e^2} \begin{pmatrix} s\,\sin\Omega \\ -s\,\cos\Omega \\ c \end{pmatrix}.$$

- Jawna zależność $\vec{e}$ i $\vec{h}$ od czasu – rozwiązanie problemu ω.

- Możliwość zastosowania niekanonicznych równań Hamiltona. Niech $\vec{v} = (h_1, h_2, h_3, e_1, e_2, e_3)^{\mathrm{T}}$. Nawias Poissona

$$(f; g) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{J}(\vec{v}) \, \frac{\partial g}{\partial \vec{v}},$$

gdzie

$$\mathbf{J}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{h}} & \hat{\mathbf{e}} \\ \hat{\mathbf{e}} & \hat{\mathbf{h}} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{x}}\,\vec{y} = \vec{x} \times \vec{y}.$$

A wtedy

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = (\vec{v};\, \mathcal{K}),$$

z funkcją Hamiltona

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{4}\left(h_1^2 + h_2^2 + 5e_3^2\right).$$

- Równania ruchu nieosobliwe i eleganckie

$$
\begin{aligned}
h_1' &= -\frac{1}{2}\,h_2\,h_3 + \frac{5}{2}\,e_2\,e_3,\\
h_2' &= \frac{1}{2}\,h_1\,h_3 - \frac{5}{2}\,e_1\,e_3,\\
h_3' &= 0,\\
e_1' &= 2\,e_3\,h_2,\\
e_2' &= -2\,e_3\,h_1,\\
e_3' &= \frac{1}{2}\left(e_1\,h_2 - e_2\,h_1\right).
\end{aligned}
$$

PŁYWY GALAKTYCZNE - PEŁNY MODEL

W układzie odniesienia skierowanym do centrum Galaktyki (obracającym się)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \\
\mathcal{H}_0 &= \tfrac{1}{2}\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\
\mathcal{H}_1 &= \Omega_0\,(y\,X - x\,Y) + \tfrac{1}{2}\left(G_2\,(y^2 - x^2) + G_3\,z^2\right).
\end{aligned}
$$

Stałe: $\Omega_0 < 0$, $\Omega_0^2 = G_2 < G_3$.
Brak symetrii, $\mathcal{H} = \mathrm{const}$ jest jedyną całką ruchu. Zagadnienie niecałkowalne. Złudne pokrewieństwo z innymi zagadnieniami (zag. Hilla, atom wodoru w polu e-m).

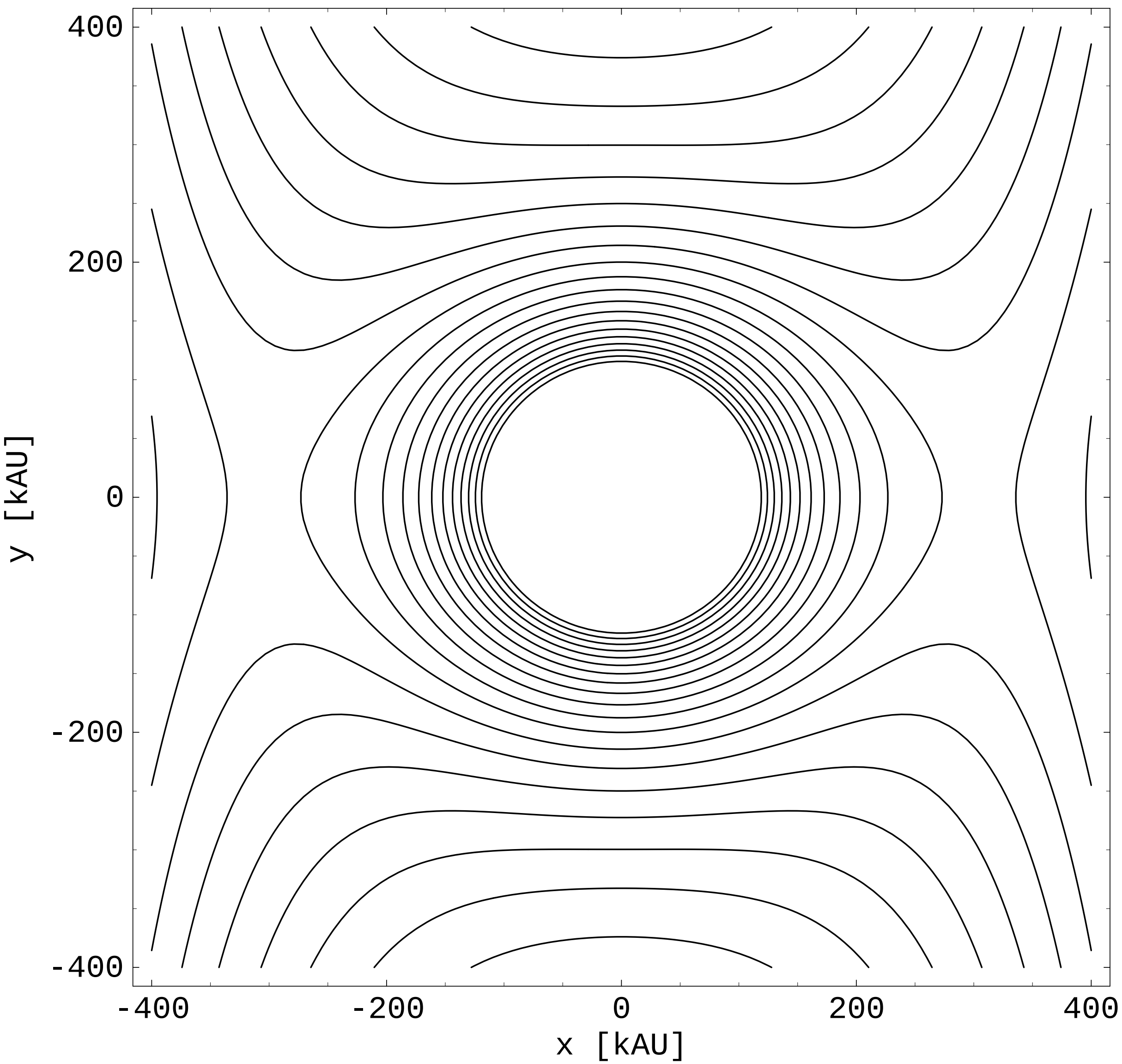
Powierzchnie zerowej prędkości

Przechodzimy od $\mathcal{H}(x,y,z,X,Y,Z)$ do $\mathcal{H}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$, korzystając z

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= X + \Omega_0\, y,\\
\dot{y} &= Y - \Omega_0\, x,\\
\dot{z} &= Z.
\end{aligned}$$

Przyjmujemy $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$ i otrzymujemy

$$\frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + G_2\, x^2 - \tfrac{1}{2}\, G_3\, z^2 = C.$$


400
200
0
-200
-400
y [kAU]
-400
-200
0
200
400
x [kAU]

UKŁAD UŚREDNIONY

- Układ uśredniony jest niecałkowalny (dwa stopnie swobody).

- Stosując „elementy wektorowe'' otrzymujemy prosty Hamiltonian (Breiter, Fouchard & Ratajczak)

$$\mathcal{K} = \frac{5}{4}\nu \left(e_1^2 - e_2^2\right) - \frac{5}{4} e_3^2 - \frac{1+\nu}{4} h_1^2 - \frac{1-\nu}{4} h_2^2 + \frac{n\,\nu}{\Omega_0} h_3,$$

gdzie

$$\nu = \frac{G_2}{G_3} = \frac{\Omega_0^2}{G_3} \approx 0.125.$$

Czy można potraktować ten problem przyjmując ν jako mały parametr ?

Inaczej: czy można traktować wpływ centrum jako zaburzenie problemu kometa+dysk ?

- TAK – dostatecznie daleko od płaszczyzny dysku i pamiętając o „sile” zaburzenia.
- NIE – w pobliżu dysku, gdyż tam znika wpływ centrum.

ZAGADNIENIE PŁASKIE

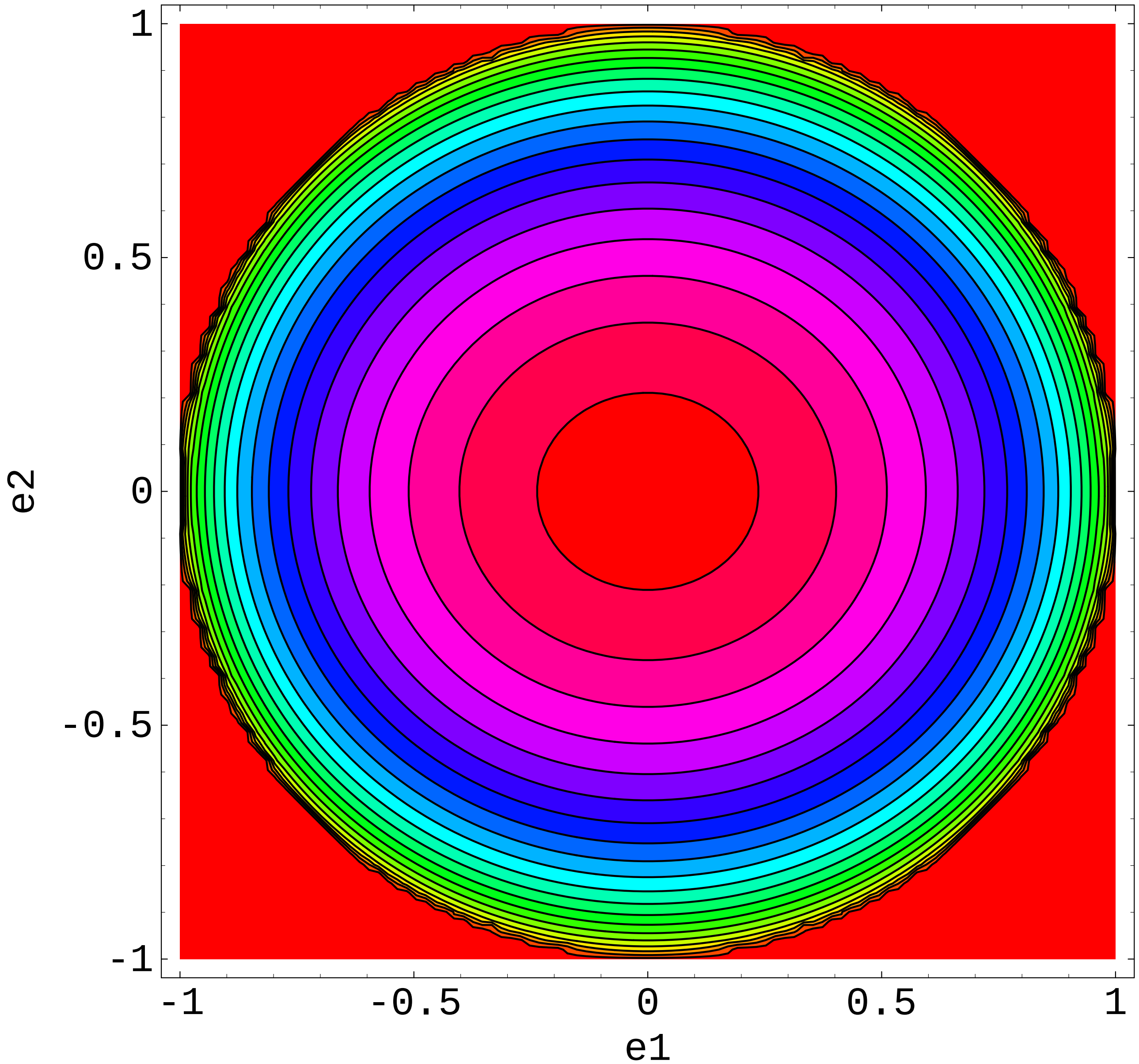
$$e_3 = h_1 = h_2 = 0, \qquad h_3 = \pm\sqrt{1 - e_1^2 - e_2^2}.$$

Jeden stopień swobody. Całka ruchu

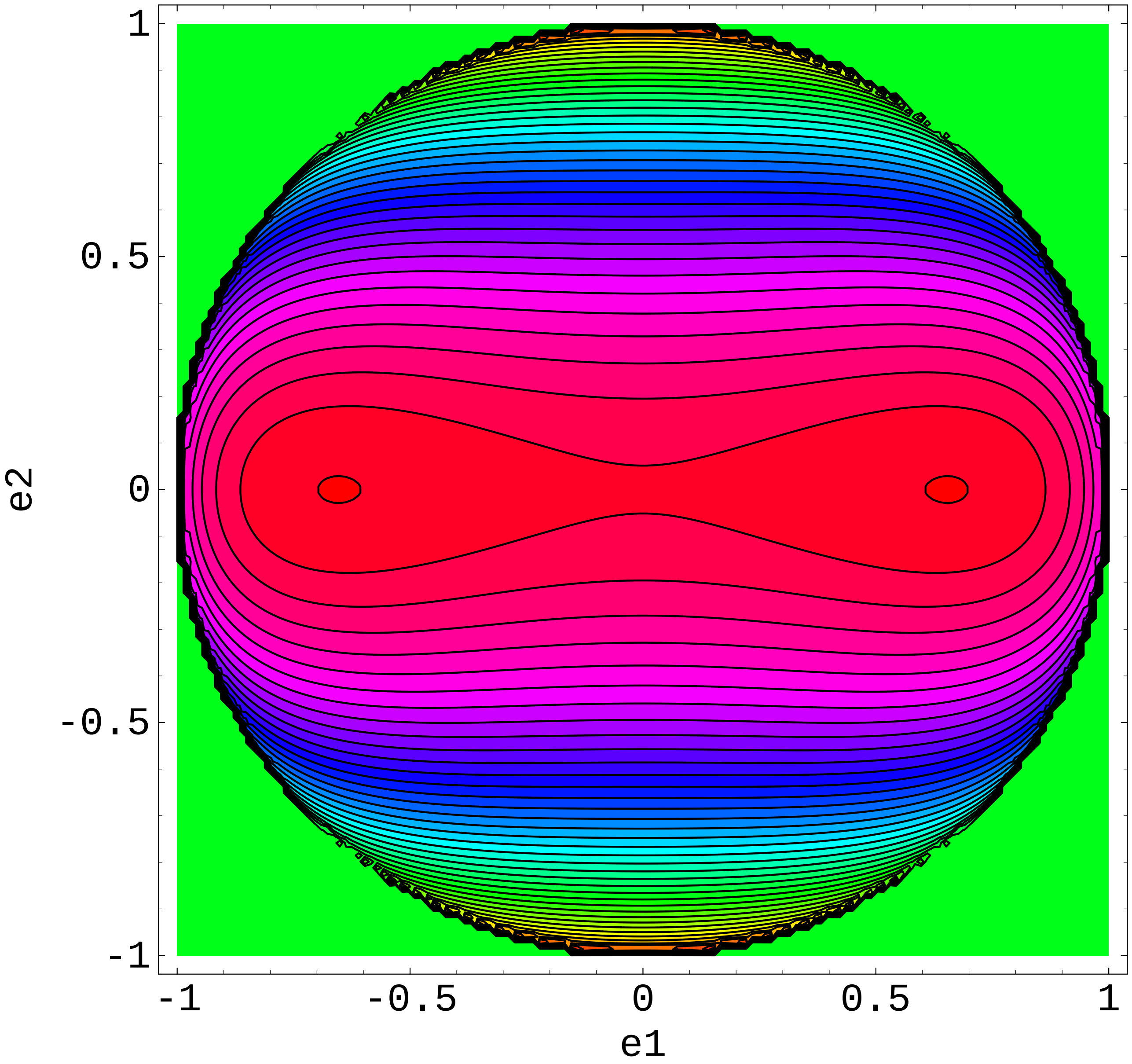
$$E = e_1^2 - e_2^2 \pm \frac{4\,n}{5\,\Omega_0}\sqrt{1 - e_1^2 - e_2^2}.$$

Wartości n/Ω_0: 7500 ($a = 1\,\mathrm{kAU}$), 670 ($a = 5\,\mathrm{kAU}$),
21 ($a = 50\,\mathrm{kAU}$), 2.64 ($a = 200\,\mathrm{kAU}$).

Morał: w Obłoku Oorta regularna cyrkulacja linii apsyd i małe oscylacje mimośrodu.



$a = 50$ kAU



$a = 250$ kAU

- Bifurkacja orbit kołowych w okolicach $a = 2 \times 10^5$ AU.

- Prawdopodobnie już wcześniej wkracza chaos wywołany rezonansami między $\dot{\varpi}$ a ruchem średnim.

- Potrzeba narzędzi do szybkiej symulacji z wyznaczaniem wykladnika Lapunowa (lub MEGNO) - ZROBIONE (zmienne KS dla zagadnienia pełnego i elementy wektorowe dla uśrednionego).

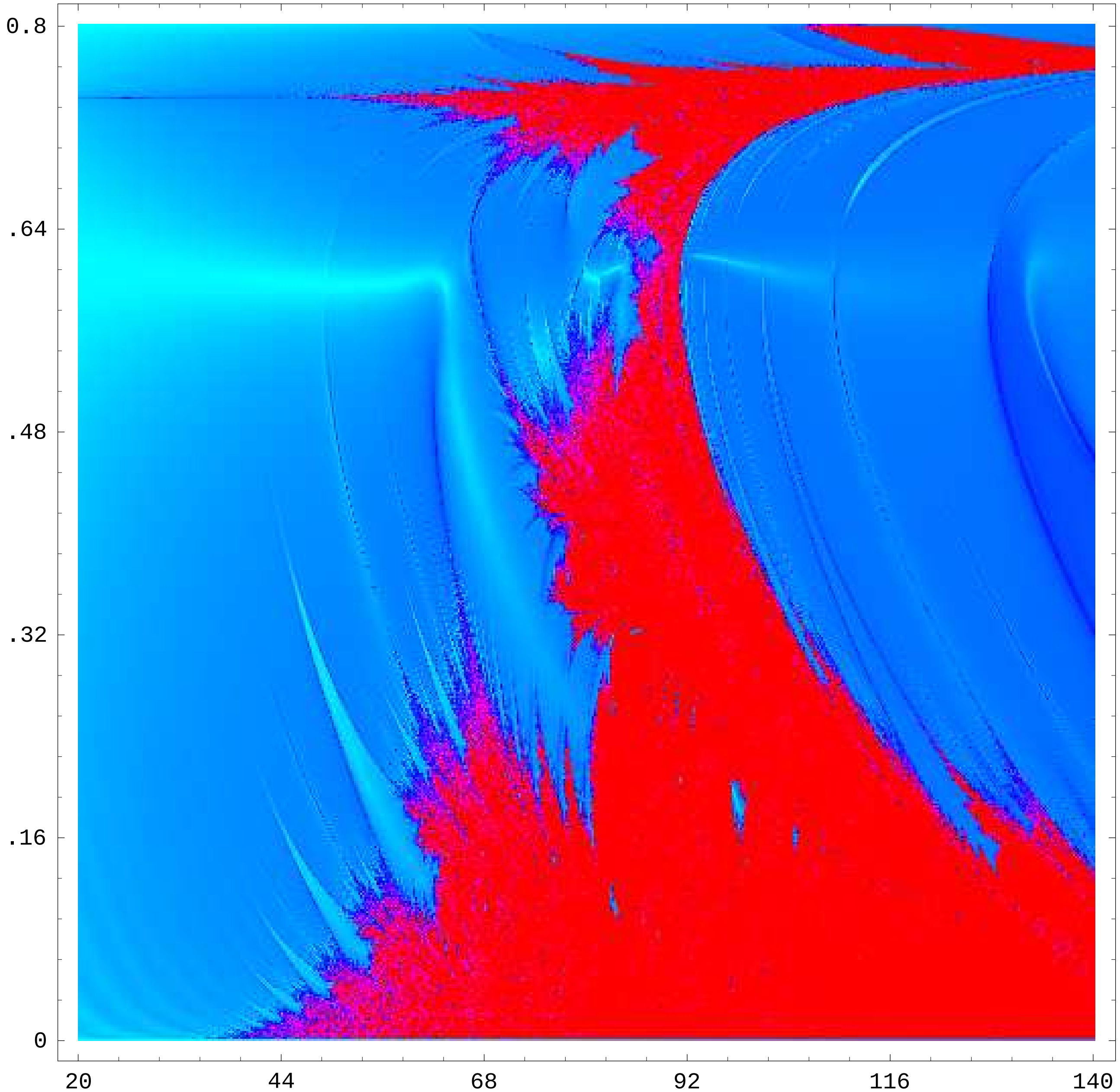
PIERWSZE WYNIKI DLA ZAGADNIENIA 3D (UŚREDNIONEGO)

$$\alpha = \sqrt{1 - e^2} \cos I = 0.6$$

$$0 < e < \sqrt{1 - \alpha^2} = 0.8$$

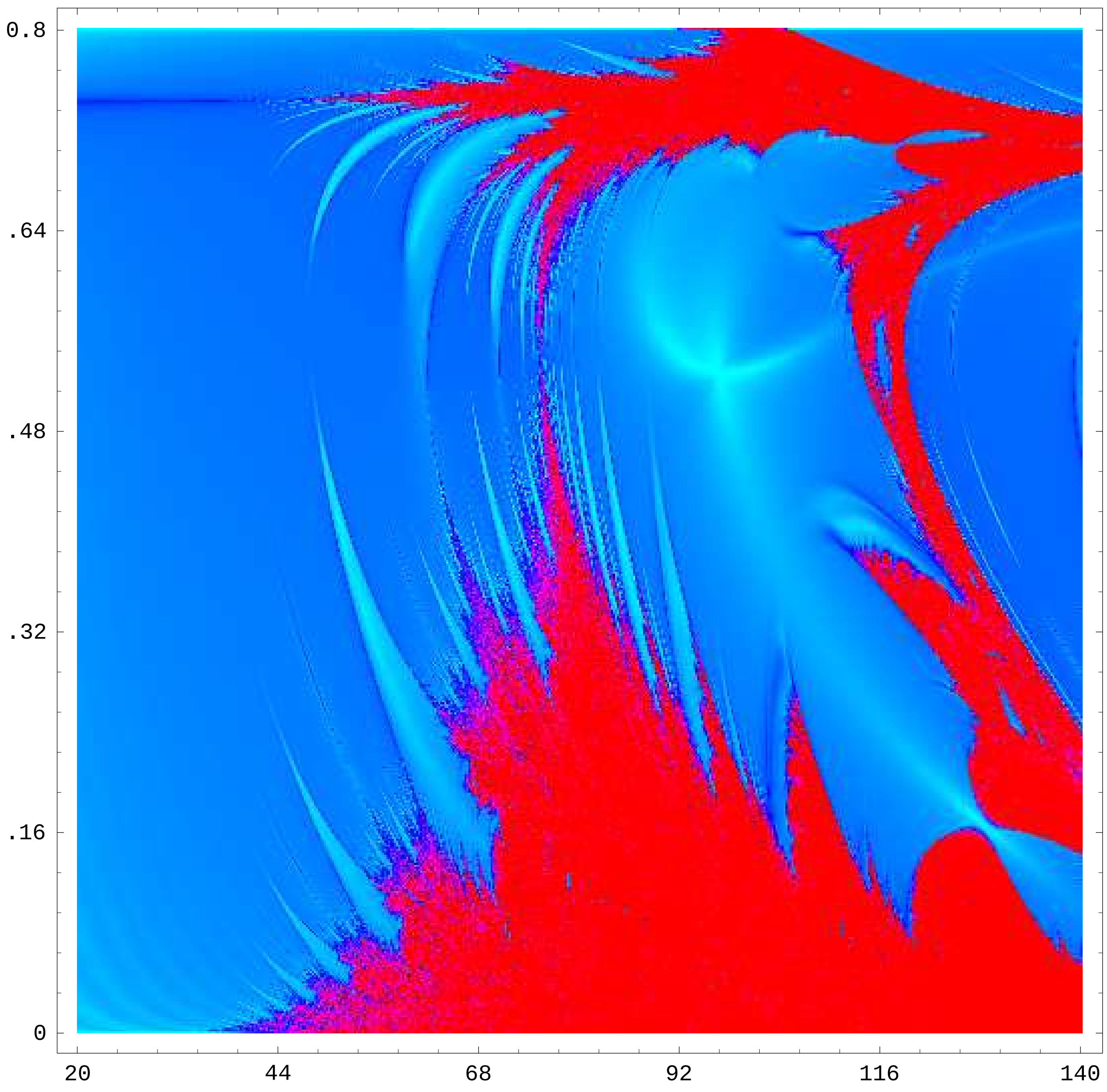
$$\arccos \alpha \approx 53^\circ < I < 90^\circ$$

$$20 \leqslant a \leqslant 140\,\mathrm{kAU}, \qquad \omega = 90^\circ, \qquad \Omega = 0$$



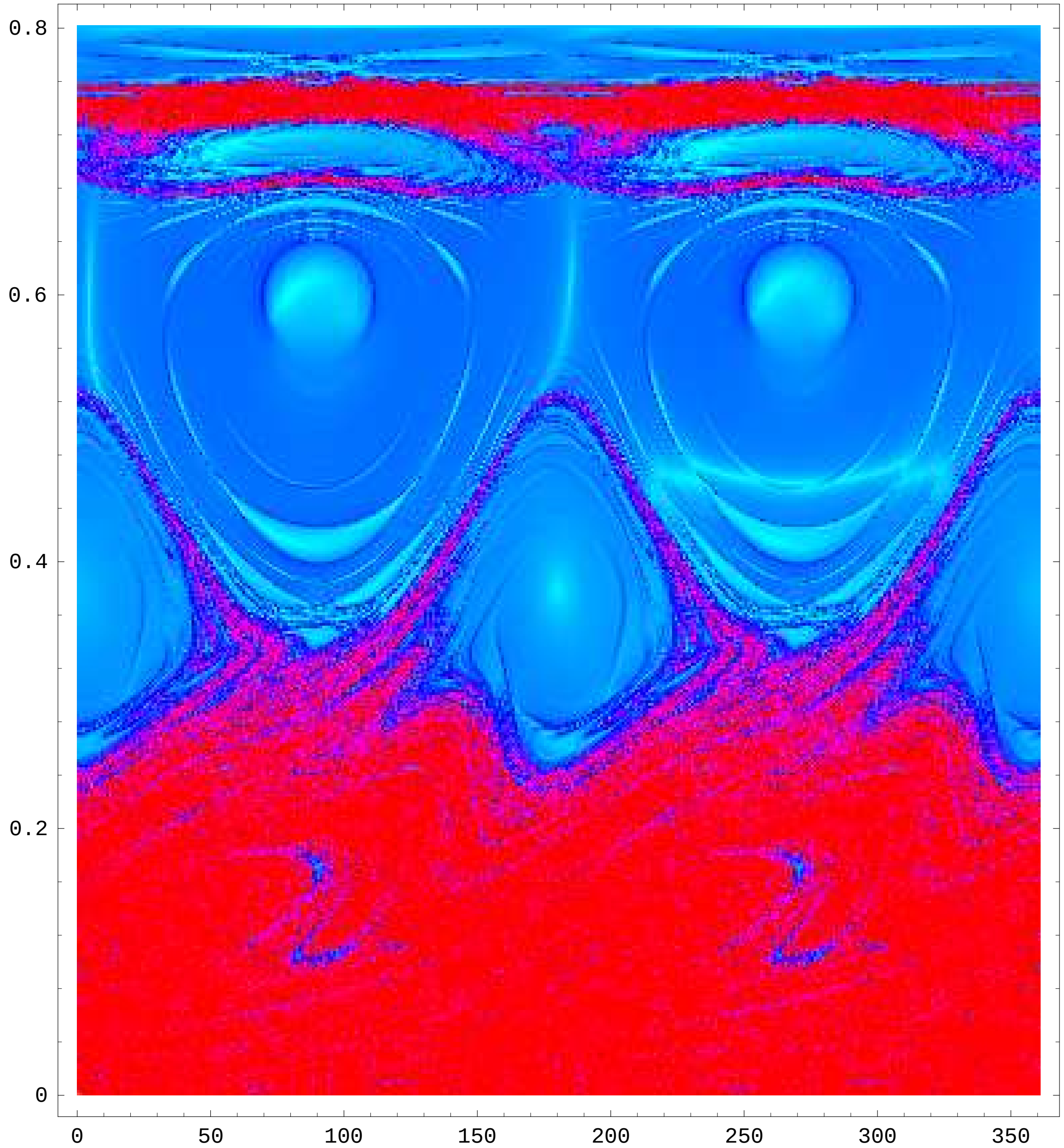
0.8
.64
.48
.32
.16
0
20
44
68
92
116
140

$$20 \leqslant a \leqslant 140\,\mathrm{kAU}, \qquad \omega = 90^\circ, \qquad \Omega = 90^\circ$$


0.8
.64
.48
.32
.16
0
20
44
68
92
116
140

$$a \leqslant 70\,\mathrm{kAU}, \qquad \omega = 90^\circ,$$

$$0 \leqslant \Omega < 360^\circ, \qquad 0 < e < 0.8$$


0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
50
100
150
200
250
300
350

WNIOSKI

Jest co robić !