

# ***Ogólnopolskie Seminarium Mechaniki Nieba***

---

## ***Rozwiązania stacjonarne w wiekowym problemie trzech ciał***

*Cezary Migaszewski & Krzysztof Goździewski*



***Centrum Astronomii***

***Uniwersytet Mikołaja Kopernika***

27-28 września 2007, Ciechocinek

## Model układu planetarnego

- W przybliżeniu mas punktowych, układ planetarny złożony z gwiazdy i dwóch planet może być opisany funkcją Hamiltona wyrażoną w kanonicznych zmiennych Poincaré (Michtchenko & Malhotra, 2004):

$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_{i=1}^2 \left( \frac{\mathbf{p}_i^2}{2\beta_i} - \frac{\mu_i \beta_i}{r_i} \right)}_{\text{część keplerowska}} - \underbrace{\frac{k^2 m_1 m_2}{\Delta} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{m_0}}_{\text{zaburzenie}} \equiv \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_{pert}$$

gdzie  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2$ ) - współrzędne planet względem gwiazdy,  $\mathbf{p}_i$  - pędy planet wyrażone względem środka masy,  $\Delta = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  - odległość między planetami,  $m_0$  - masa gwiazdy,  $m_i$  - masy planet oraz  $\mu_i = k^2(m_0 + m_i)$ ;  $\beta_i = (1/m_i + 1/m_0)^{-1}$ . Indeksy  $i = 1, 2$  numerują odpowiednio wewnętrzną i zewnętrzną planetę.

- Wprowadźmy kanoniczne zmienne Delanuy typu ką-działanie  $(\phi, I)$ :

$$\begin{aligned} M_i & - \text{anomalia średnia} & L_i & = \beta_i \sqrt{\mu_i a_i}, \\ \omega_i & - \text{argument pericentrum} & G_i & = L_i \sqrt{1 - e_i^2}, \\ \Omega_i & - \text{długość węzła wstępującego} & H_i & = G_i \cos I_i. \end{aligned}$$

- Ewolucja układu opisywana jest kanonicznymi równaniami Hamiltona:

$$\dot{\phi}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_j}, \quad \dot{I}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_j}.$$

## Teoria wiekowa

- Teorię wiekową możemy stosować do opisu dynamiki układów, w których ewolucji potrafimy wyróżnić **różne skale czasowe**.
- Układy planetarne: – **zmiennosc krótkookresowa** (zależność  $\mathcal{H}$  od tzw. zmiennych szybkich, np. anomalii średnich), – **ewolucja w skali wiekowej**.
- Jeżeli zaburzenie  $\mathcal{H}_{pert}$  jest dużo mniejsze od głównego oddziaływania  $\mathcal{H}_K$ , oraz układ jest daleki od silnego rezonansu ruchów średnich, możemy wyizolować część funkcji Hamiltona odpowiedzialną za ewolucję wiekową  $\mathcal{H}_{sec}$ , poprzez uśrednienie  $\mathcal{H}$  po zmiennych szybkich ( $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ ):

$$\mathcal{H}_{sec} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} dM_1 dM_2.$$

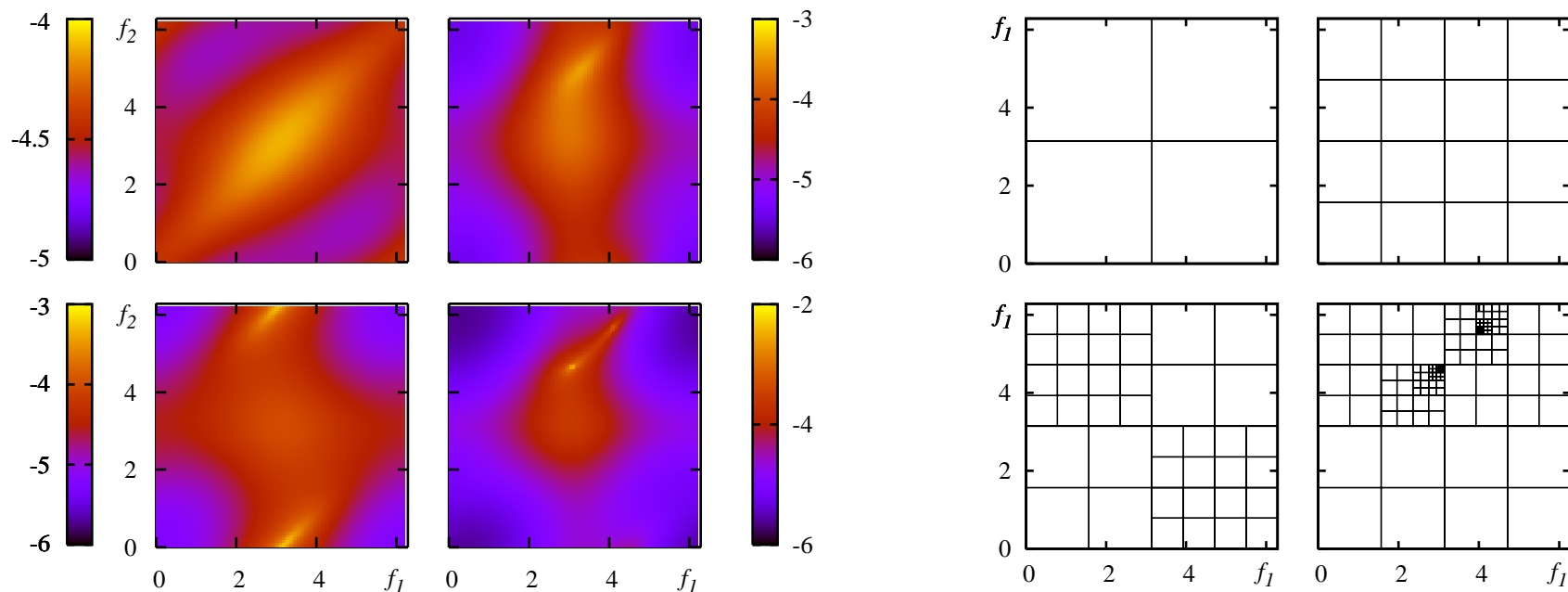
- W klasycznym podejściu, funkcja Hamiltona jest rozwijana w szereg fourierowski względem elementów orbitalnych (mimośrodków i/lub nachyleń względnych orbit). Podejście takie jest ograniczone do małych wartości  $e, I_{mut}$ .
- **Michtchenko & Malhotra (2004)** zaproponowały, aby uśrednienie  $\mathcal{H}_{sec}$  wykonywać numerycznie. **Podejście półanalityczne nie jest ograniczone poprzez małe wartości  $e, I_{mut}$** . Pozwoliło one na odkrycie nowej (nieznanej na gruncie teorii klasycznej) własności dynamicznej płaskiego układu dwóch planet.
- **Libert & Henrard (2005)** potwierdzili wyniki Michtchenko & Malhotra (2004) analitycznie.
- **Michtchenko, Ferraz-Mello & Beaugé (2006)** rozszerzyli metodę do analizy układu 3D.
- **Libert & Henrard (2007)** potwierdzili wyniki Michtchenko, et al. (2006) analitycznie. Wykazali również wpływ stabilności punktu równowagowego  $e_1 = e_2 = 0$  na globalny obraz dynamiki układu.

## Numeryczne uśrednienie $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}_{sec}$

- W celu wydzielenia części wiekowej funkcji Hamiltona  $\mathcal{H}$ , musimy dokonać jej uśrednienia po anomaliach średnich. Aby zrobić to numerycznie, musimy znać wartości  $\mathcal{H}$  na dyskretnej siatce anomali średnich ( $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ ). Zatem dla każdego z węzłów siatki trzeba rozwiązać równanie Keplera.
- Żeby tego uniknąć wykonujemy zamianę zmiennych ( $d\mathbf{M}_i = \mathbf{J}_i d\mathbf{f}_i$ ), co znacznie upraszcza całkowanie:

$$\mathcal{H}_{sec} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mathcal{H} J_1 J_2] df_1 df_2, \quad J_i(e_i, f_i) = (1 - e_i^2)^{\frac{3}{2}} (1 + e_i \cos f_i)^{-2}.$$

- W celu wykonania powyższej całki zastosowaliśmy ideę siatki adaptywnej, tzw. **adaptive-mesh refinement (AMR)** oraz kwadraturę Gaussa-Legendre'a wysokiego rzędu (64 lub więcej):



## Redukcja układu średniego

- Po uśrednieniu  $\mathcal{H}_{sec}$  nie zależy od anomalii  $M_1, M_2$ , zatem  $L_1, L_2$  są stałe ( $a_1, a_2$  są stałe).
- Ponieważ  $\mathcal{H}_{sec}$  zależy tylko od  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ , nie od  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  z osobna, możemy wykonać następującą transformację kanoniczną (redukujemy układ do dwóch stopni swobody):

$$\begin{array}{l}
 (\omega_1, G_1) \\
 (\omega_2, G_2) \\
 (\Omega_1, H_1) \\
 (\Omega_2, H_2)
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 (\omega_1, G_1) \\
 (\omega_2, G_2) \\
 (\theta_1 = [\Omega_1 + \Omega_2]/2, J_1 = H_1 + H_2) \\
 (\theta_2 = [\Omega_1 - \Omega_2]/2, J_2 = H_1 - H_2).
 \end{array}$$

- $\mathcal{H}_{sec}$  nie zależy od  $\theta_1$ , zatem  $J_1 = \text{const} = |\mathbf{C}|$ , gdzie  $\mathbf{C}$  jest całkowitym momentem pędu układu.
- Ponadto,  $\theta_2 = \pi/2$  (w układzie Laplace'a), oraz  $J_2 = (G_1^2 - G_2^2)/J_1$ .
- Uśredniony układ posiada dwa stopnie swobody dla ustalonej wartości  $\mathbf{C}$  (lub  $AMD = L_1 + L_2 - C$ , *Angular Momentum Deficit*).
- Dynamika układu opisywana jest następującymi równaniami (Michtchenko et al. 2006):

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial G_1}, & \dot{G}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \omega_1}, \\
 \dot{\omega}_2 &= \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial G_2}, & \dot{G}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \omega_2}.
 \end{aligned}$$

## Rozwiązania stacjonarne

- Rozwiązania stacjonarne są klasą rozwiązań określonych warunkiem:  $\dot{\phi}_j = 0$ ,  $\dot{I}_j = 0$ .
- W opisywanym zagadnieniu warunek ten przyjmuje postać  $[\mathcal{H}_{sec} = \mathcal{H}_{sec}(G_1, G_2, \omega_1, \omega_2)]$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial G_1} &= 0, & \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \omega_1} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial G_2} &= 0, & \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \omega_2} &= 0.\end{aligned}$$

- Wykorzystując istniejące w układzie symetrie, możemy znaleźć takie pary kątów  $\omega_1^*, \omega_2^*$ , dla których

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \omega_1} = 0 \right|_{\omega_1^*, \omega_2^*}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{H}_{sec}}{\partial \omega_2} = 0 \right|_{\omega_1^*, \omega_2^*}.$$

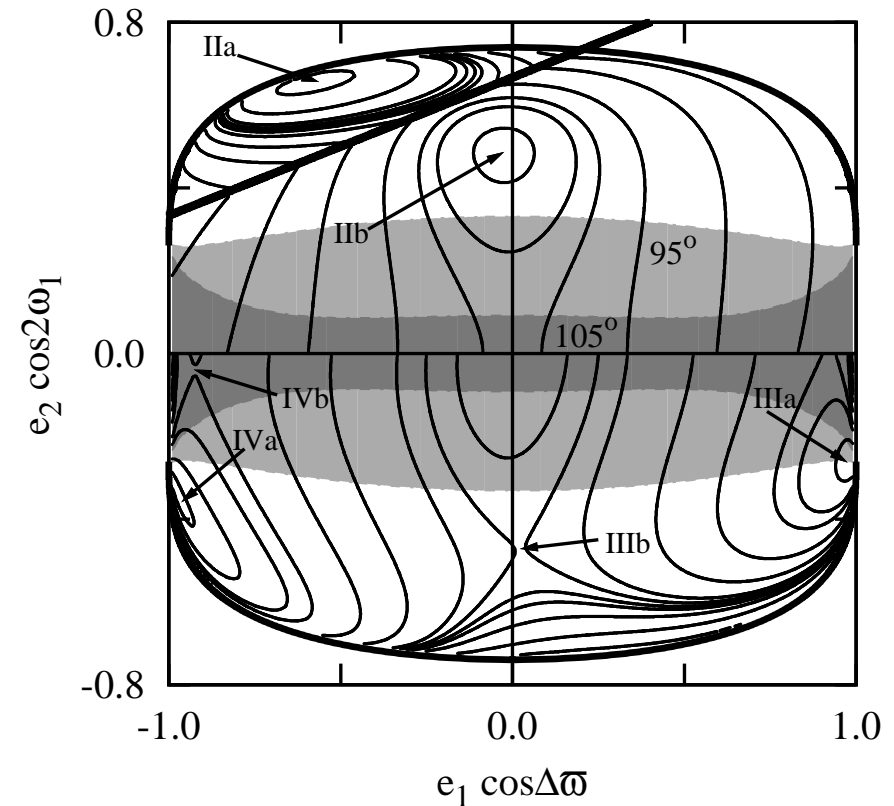
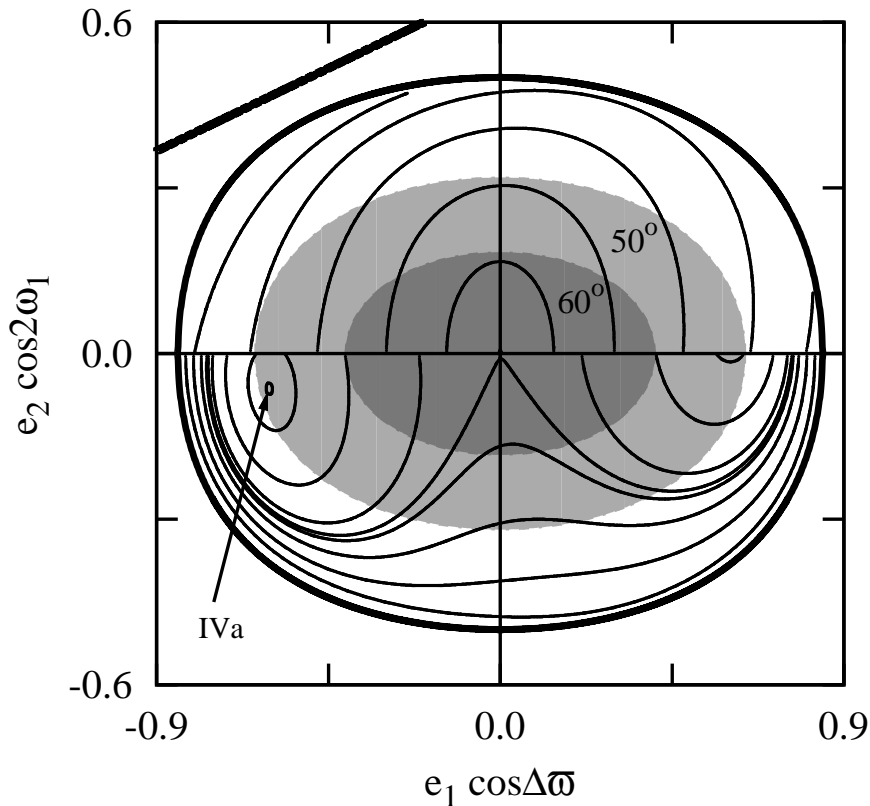
- Są to następujące pary:  $(\omega_1^*, \omega_2^*) = \{(0, \pi), (0, 0), (\pi/2, -\pi/2), (\pi/2, \pi/2)\}$ .
- Inaczej możemy napisać:  $(\Delta \tilde{\omega}^*, 2\omega_1^*) = \{(0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)\}$ .
- Zmienne  $(G_i, \omega_i)$  mają osobiwość dla  $e_i = 0$ , dlatego wprowadzamy zmienne nieosobliwe (Libert & Henrard, 2007):

$$x_i = \sqrt{2(L_i - G_i)} \cos \omega_i, \quad y_i = \sqrt{2(L_i - G_i)} \sin \omega_i.$$

- Łatwo pokazać, że dla  $e_1 = e_2 = 0$  ( $x_i = 0$ ,  $y_i = 0$ )  $\mathcal{H}_{sec}$  posiada ekstremum (Libert & Henrard, 2007).

## Funkcja $\mathcal{H}_{sec}$ na płaszczyźnie reprezentatywnej

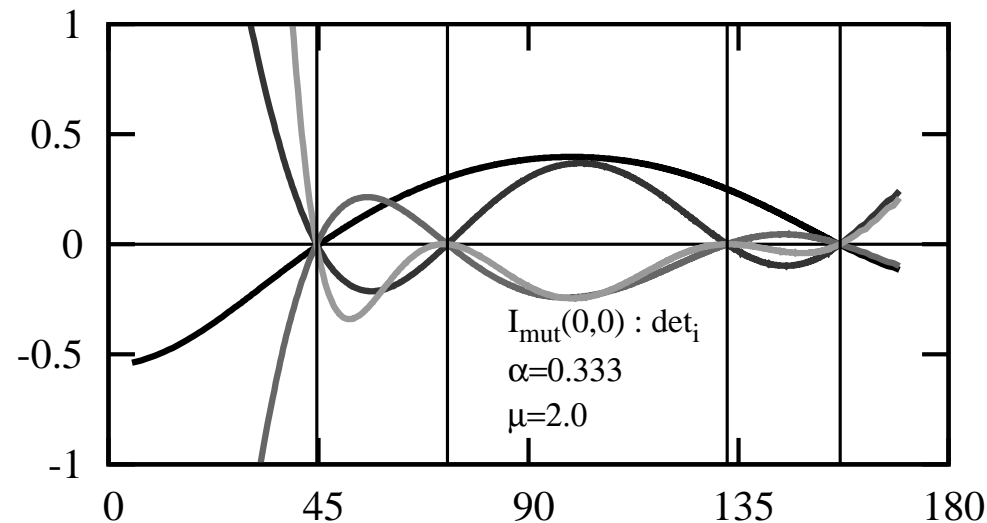
- Poziomy energii na płaszczyźnie  $[e_1 \cos \Delta \tilde{\omega} \times e_2 \cos 2\omega_1]$  dla  $\alpha \equiv a_1/a_2 = 0.333$ ,  $\mu \equiv m_1/m_2 = 0.5$  oraz  $AMD^* \equiv AMD/(L_1 + L_2) = 0.1$  (lewy panel),  $AMD^* = 0.25$  (prawy panel).



- Strzałkami oznaczono rozwiązania stacjonarne. Zacięniowane obszary odpowiadają nachyleniom względnym  $I_{mut}$  większym od ustalonych wartości.

## Stabilność rozwiązań stacjonarnych

- Liniową stabilność rozwiązania określamy rozwiązując zagadnienie własne dla hesjanu funkcji Hamiltona:  $\det(\mathbb{H}_2 - \lambda\mathbb{I}) = 0$ , gdzie  $\mathcal{H}_{sec} = \mathcal{H}_{sec}(y_1, y_2, x_1, x_2)$ .
- Do rozwiązania dostajemy wielomian  $at^2 + bt + c = 0$ , gdzie  $t \equiv \lambda^2$ . Rozwiązanie liniowo stabilne oznacza  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ .
- Zgodnie z tw. Lyapunowa, jeżeli  $\mathcal{H}_{sec}$  jest funkcją dodatnio lub ujemnie określoną w położeniu równowagi, to jest ono stabilne.

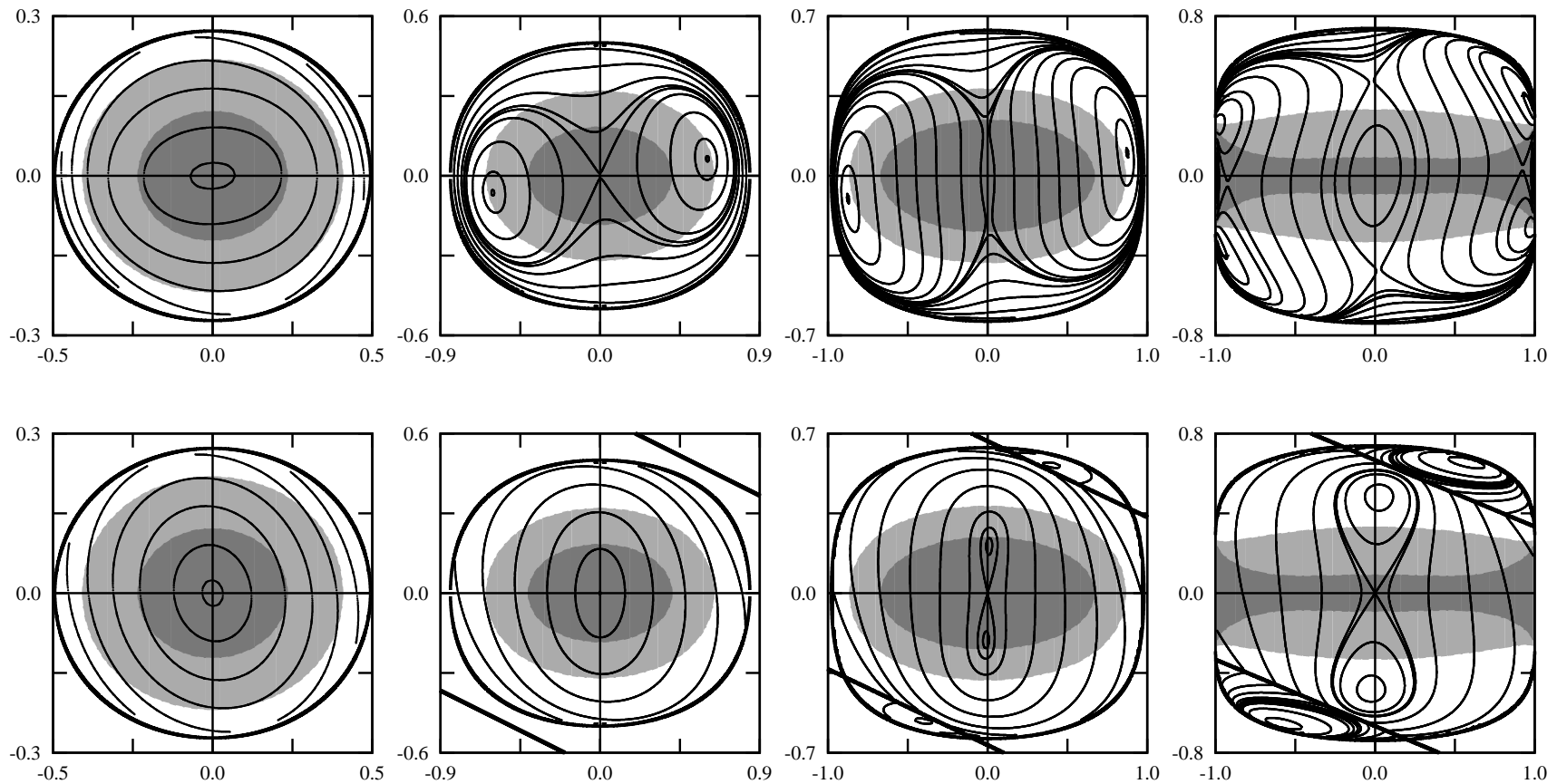


- **Wartości nachylenia względnego orbit kołowych  $[I_{mut}(0,0)]$ , dla których zerują się minory hesjanu są wartościami krytycznymi decydującymi o globalnych własnościach dynamicznych układu.**



## Bifurkacje rozwiązań stacjonarnych

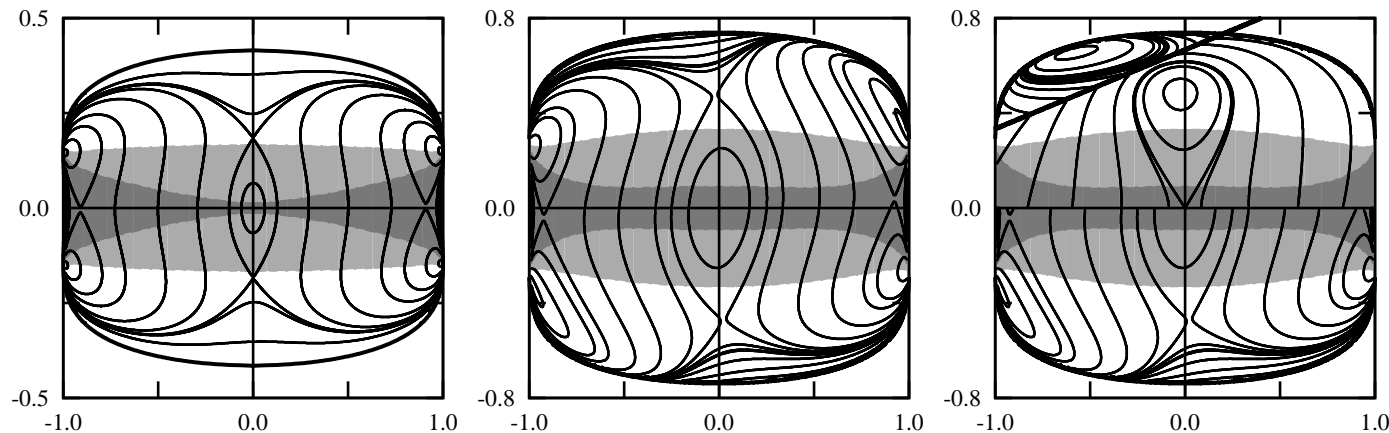
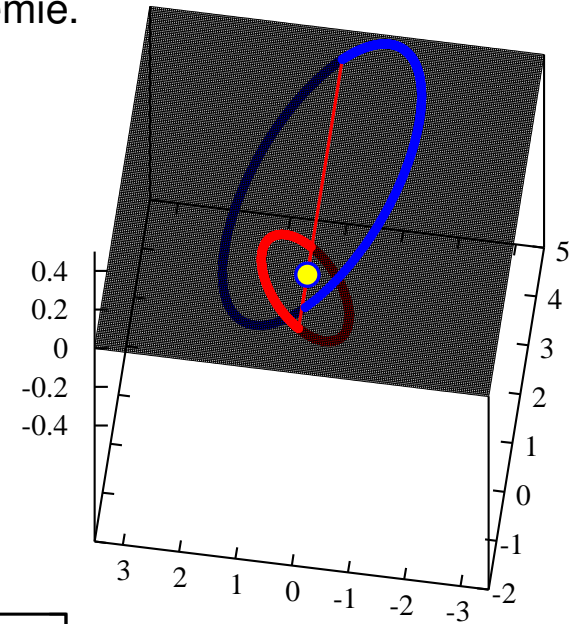
- Pierwsze zero minorów hesjanu [zmiana stabilności punktu  $(0,0)$ ] jest punktem bifurkacyjnym, w którym tworzy się rezonans Lidova-Kozai (Libert & Henrard, 2007).
- Poziomy energii na płaszczyźnie  $[e_1 \sin \omega_1 \times e_2 \sin \omega_2]$  (górne panele) oraz  $[e_1 \cos \omega_1 \times e_2 \cos \omega_2]$  (dolne panele) dla  $\alpha = 0.333$ ,  $\mu = 0.5$  oraz  $AMD^* = 0.03, 0.1, 0.18, 0.25$  (od lewej do prawej).



- Kolejne zera minorów hesjanu wiążą się z pojawieniem nowych rozwiązań stacjonarnych.

# Nowe rozwiązania stacjonarne

- Znane dotychczas rozwiązania stacjonarne to rezonans Lidova-Kozai ( $\omega_1 = \omega_2 = \pm\pi/2$ ) oraz rozwiązanie  $e_1 = e_2 = 0$ .
- Zastosowanie pół-analitycznej teorii wiekowej w pełnym zakresie  $AMD^* \in (0, 1)$  oraz mimośrodków i nachyleń względnych, a także w szerokim zakresie stosunków mas i pólosi wielkich pozwoliło na odkrycie **wielu nowych rodzin rozwiązań stacjonarnych** w omawianym problemie.
- Z ciekawszych rozwiązań możemy wymienić
  - tzw. **konfigurację łańcuchową** - stabilne położenie równowagi umiejscowione w przestrzeni fazowej ponad linią kolizji,
  - **bifurkację rezonansu Lidova-Kozai (drugie rozwiązanie dla  $\omega_1 = -\omega_2 = \pm\pi/2$ )** oraz jego asymetrię dla przypadków "nieklasycznych",
  - niestabilne położenia równowagi dla  $e_1 \sim 0$ .



## Podsumowanie

---

- **Pół-analityczna teoria wiekowa** jest użytecznym narzędziem do badania własności dynamicznych układów planetarnych.
- Opisywana metoda **nie jest ograniczona** do małych wartości mimośrodków i nachyleń względnych.
- Metoda całkowania wykorzystująca ideę siatki adapttywnej daje precyzyjne wyniki w relatywnie krótkim czasie CPU.
- Dynamika wiekowa układu przestrzennego dwóch planet jest bardzo złożona.
- W przestrzeni fazowej występują **liczne rozwiązania stacjonarne** (stabilne jak i niestabilne), w tym **wiele nowych**, nieznanych dotychczas rozwiązań.
- Przedstawiona analiza daje globalną informację o rozwiązaniach stacjonarnych problemu. Jedynymi parametrami są tutaj stosunek mas planet  $\mu$ , stosunek pólosi wielkich  $\alpha$  oraz znormalizowany **AMD**.

## ***Literatura***

---

- Libert, A.-S. i Henrard, J. (2005). Exoplanetary systems: The role of an equilibrium at high mutual inclination in shaping the global behaviour of the 3-D secular planetary three-body problem. *Icarus*, preprint 10.1016/j.icarus.2007.05.007.
- Libert, A.-S. i Henrard, J. (2007), Analytical Approach to the Secular Behaviour of Exoplanetary Systems. *CeMDA*, 93:187-200.
- Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S. and Beaugé, C. (2006), Modeling the 3-D secular planetary three-body problem. *Icarus*, 181:555–571.
- Michtchenko, T. A. and Malhotra, R. (2004), Secular dynamics of the three-body problem: application to the  $\upsilon$  Andromedae planetary system. *Icarus*, 168:237–248.
- Migaszewski, C. and Goździewski, K., The secular dynamics of non-coplanar 2-planet system. Stationary solutions and their stability. (w przygotowaniu)

## ***Podziękowania***

---

Praca jest wspierana przez MNiSW, grant nr 1P03D-021-29